

la simulación eramis bueno logicocibernetica

El presente trabajo tiene como finalidad hacer una presentación, que de ninguna manera pretenderá ser exhaustiva, de las relaciones entre la Cibernética, ciencia del *control y la comunicación en la máquina y el animal* como fuera caracterizada por Wiener, y la Lógica matemática: uno de los instrumentos más poderosos con que cuenta el arsenal metodológico de aquélla.

La Lógica matemática como disciplina científica surgió mucho antes que la Cibernética. En sus comienzos (mediados del siglo XX) su presencia no fue motivo de gran inquietud. Como ocurriera otrora con la geometría no euclidiana, durante largo tiempo la misma era considerada con bastante escepticismo.

Es de notar que desde su aparición se ha pretendido considerarla como un aparato que debe facilitar, en primer término, el proceso natural del pensamiento humano, queremos decir, que aquellas personas "equipadas" con el aparato de la Lógica matemática pueden razonar mejor en el quehacer cotidiano. En realidad este no es el objeto de la Lógica matemática. La misma no se plantea como tarea principal el describir el proceso natural del pensamiento. Su objeto, en gran medida radica en la elaboración de una teoría general de la deducción que permita construir mecanismos adecuados para hacer las operaciones mentales.

Inicialmente el desarrollo de la Lógica matemática marchó parejo con los intentos de formalizar algunos aspectos de la actividad intelectual

62 humana. Posteriormente aquel desarrollo estuvo sujeto en gran parte a la tarea de crear los fundamentos lógicos de las matemáticas. Con esto se relacionan los problemas de la *consistencia* y la *completitud* de un sistema de premisas tomadas en alguna parte de las matemáticas como presupuestas, los problemas relacionados con la determinación de todas las consecuencias que se desprenden de estas premisas (axiomas) y otras cuestiones semejantes.

La Lógica matemática es situada por muchos autores como una de las premisas del surgimiento de la Cibernética, fundamentándose quizás en razones como la de que aquella sirva de instrumento de cálculo de las máquinas cibernéticas. Ya en 1910 Ehrenfest¹ llamó la atención sobre la posibilidad de aplicar la Lógica matemática a la descripción del comportamiento de mecanismos técnicos como los circuitos de contacto. No obstante, la utilización efectiva de los métodos de aquella en la solución de tareas prácticas relacionadas con la técnica de tales circuitos no se produjo hasta los años treinta en que comenzaron a aparecer los trabajos de C. Shannon,² quien mostró que la parte de la Lógica matemática conocida como *cálculo proposicional* contiene fórmulas que describen no solamente operaciones con proposiciones, sino también el trabajo de los *circuitos de contacto*. Los vínculos establecidos entre la Lógica matemática y la conducta de los circuitos condujo a la creación de disciplinas como la *teoría de los circuitos de contacto*.

Pronto los métodos de la Lógica matemática penetraron profundamente en las ciencias prácticas. Resultó que aquéllos no solamente eran propicios para la descripción de los circuitos de contacto, sino que también muchos otros mecanismos de acción discreta requerían del aparato de la Lógica matemática. Por consiguiente, la Lógica matemática, sin disminuir en un ápice su rol en las disciplinas de tipo teórico, pasaba a formar parte ahora de la instrumentación requerida en la investigación y diseño de las estructuras técnicas más variadas. Este valor práctico de la Lógica matemática se ha elevado considerablemente en relación con la investigación de los principios generales del control.

¹ Ehrenfest P., Retsenziya na knigu L. Kutiura *Algebra logiki* Zh. RFXO, Fiz. otd, 1910, T. 42, 10, pág. 382-387.

² Shannon C., A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 57 (1938).

(Trabajos similares fueron publicados en 1938 por A. Nakasima en Japón y en 1941 por V. I. Shestakov en la URSS).

La Lógica matemática ha servido de fundamento a la investigación de problemas cibernéticos de la trascendencia de la construcción de máquinas con un grado considerable de *confiabilidad*. En este sentido han hecho época los resultados obtenidos por Von Neumann³ sobre la posibilidad de construir mecanismos confiables a partir de elementos no confiables.⁴

De otra parte la Lógica matemática es utilizada también para la elaboración de los métodos de programación para las computadoras electrónicas.⁵

Los circuitos de contacto y autómatas en general, y la lingüística matemática constituyen otros campos no menos importantes de la aplicación de la Lógica matemática en la Cibernética.

2 • Sistemas, modelos y estructuras: Una posible definición del objeto de estudio de la Lógica Matemática.

Siempre que se aborda la tarea de presentar algún tema vinculado con la Lógica matemática se plantea invariablemente la cuestión de la definición de su objeto. Por lo general en la mayor parte de los casos esta cuestión queda abierta. No es difícil encontrar inclusive monografías de Lógica matemática donde el problema no se toca. En muchos otros casos se hace una definición un tanto "tosca" de la misma como las del tipo "La lógica es la ciencia de las leyes del pensamiento",... la ciencia del pensar correcto",... la ciencia que estudia las proposiciones desde el punto de vista de su forma", etc.

En este trabajo se dejará presentada una de las posibles soluciones que pueden ser dadas al problema, sin pretender que la misma sea definitiva.

³ von Neumann J., Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components, *Automata studies*, ed. by Shannon C., MacCarthy J., Princeton University Press, 1956, 43.

⁴ Tanto los mecanismos eléctricos como los mecánicos están sometidos estadísticamente a la posibilidad de interrupciones en su trabajo, hecho que es igualmente probable para las redes nerviosas. Los componentes de alguna red nerviosa, por ejemplo que actúan de una manera distinta a la que debieran, reciben el nombre de *elementos no confiables*.

⁵ Ver por ejemplo: Kalmár R., On a digital computer which can be programmed in a mathematical formula language. En *Trabajos del II Congreso húngaro de Matemática*, Budapest, 24-31 de Agosto de 1960, V. 3-16.

La cuestión de determinar el objeto de estudio de la Lógica matemática pudiera ser abordada partiendo de las consideraciones que siguen:

Llamamos *sistema* a un objeto complejo determinado, en el que podamos distinguir una estructura definida por una red de vínculos o relaciones entre las partes componentes del mismo. Cada una de las partes componentes de dicho objeto constituye un *elemento* del sistema. Los elementos de un sistema pueden ser físicos (mecánicos, eléctricos, termodinámicos, etc.), químicos, biológicos y mixtos. En todo sistema pueden distinguirse diversas magnitudes de *entrada* y de *salida*. Para la entrada se cuenta con denominaciones más expresivas como son: causa, estímulo, acción, irritación, mientras que para la salida se tienen: consecuencia, efecto, respuesta, reacción, etc. Determinado cambio en la magnitud (o magnitudes) de entrada de un sistema lleva aparejado algún cambio en la magnitud de salida. Esta dependencia de la magnitud de salida con respecto a la magnitud de entrada se define mediante una *función o ley de conducta del sistema*. En los casos en que las salidas están unívocamente determinadas por las entradas, los sistemas son llamados *deterministas*, para diferenciarlos de aquellos en que las salidas solamente están determinadas en cierto grado de probabilidad (ante magnitudes de entradas fijas).

La Lógica matemática figura entre las ciencias que contribuyen a elaborar métodos para un estudio estructural de los sistemas. Sobre la base de tales métodos se resuelven múltiples tareas prácticas relacionadas con la investigación o creación de sistemas complejos.

Uno de los conceptos fundamentales de la ciencia contemporánea es el de *modelo*. El mismo es utilizado ampliamente en la Cibernética, la Lógica matemática, la Semántica, la Física, la Química, la Matemática, la Lingüística y otras ciencias. De manera intuitiva pudieramos caracterizar un modelo como algún objeto complejo cuyos elementos pueden ser situados en correspondencia con los elementos de otro objeto complejo llamado *original*. Los vínculos y relaciones que tengan lugar entre los elementos del original corresponden a algunos vínculos y relaciones entre determinados elementos del modelo.

Por una vía formal pudieramos decir que dos sistemas de objetos S y M se *simulan* entre sí (son modelos uno del otro), si es posible establecer una imagen homomorfa de S en algún sistema S' y una imagen homomorfa de M en algún sistema M' , tales que S' y M' sean isoformas entre sí. Esta relación de "ser modelo", definida así, es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, es una relación del tipo equivalencia, la cual es

satisfecha (cuando $S = S'$ y $M = M'$) por cualesquiera sistemas isomorfos entre sí.

65

Es útil comenzar el análisis de las propiedades de un sistema con el análisis de la estructura del mismo. Por consiguiente, en el modelo puede ser reflejada también solamente la estructura, solamente el esquema de las relaciones entre los elementos del sistema. Un modelo tal recibe el nombre de modelo estructural del sistema dado.

La Lógica matemática está vinculada principalmente con los modelos estructurales de los objetos investigados, puesto que en la misma se consideran modelos estructurales de por sí, mientras no sean encontrados objetos reales (interpretaciones) que posean aquellas estructuras conocidas ya teóricamente en la Lógica matemática.

La mayor parte de los objetos complejos poseen una estructura jerárquica. Esto significa que después de conocidos los elementos del sistema y establecida la estructura de sus relaciones, es posible pasar a la consideración de cada elemento *per se* y determinar su estructura, pudiéramos decir: determinar los "microelementos" y las "microestructuras" en las cuales aquéllos se insertan. Esos elementos de elementos pueden ser llamados elementos de segundo orden, mientras que los iniciales pueden ser llamados de primer orden. Correspondientemente, la estructura inicial debe ser llamada estructura de primer orden, mientras que la "microestructura" —estructura de segundo orden. Es evidente que un sistema real puede poseer un número considerable de órdenes o escalones. Estas relaciones pueden verse entre los tejidos nerviosos (redes) y sus componentes elementales (las neuronas).

Cuando se crea un modelo de algún sistema, aquél deberá poseer también una estructura jerárquica en relación con el original. Consideraremos que el segundo escalón es más profundo que el primero, el tercero más profundo que el segundo y así sucesivamente. Entonces es claro que mientras más profundo sea el modelo, es decir cuanto mayor sea el número de escalones del original que el mismo simule, más se aproximará el modelo a las propiedades del original. También está claro que la profundidad del modelo se elegirá de acuerdo con los objetivos concretos de la investigación de que se trate. Puede presentarse el caso de modelos de profundidad cero, es decir de aquellos donde el factor de membresía del sistema no se refleja, y por consiguiente, no se simula la estructura, inclusive, del primer escalón.

Existen sistemas en los que es muy fácil distinguir los elementos componentes y el esquema de relaciones entre ellos. Son estos, los llamados

sistemas binarios discretos, cuyo rasgo principal es que cuando hacemos referencia a la situación de sus elementos (excitado, inhibido; conectado, desconectado, etc.) o al hecho de que los mismos estén directamente vinculados con otros elementos de ese sistema, solamente se puede decir "sí" o "no": se toma como criterio un *indicador binario*. (De ser posibles y/o necesarios otros criterios, se tomarían indicadores ternarios, tetrarios, etc.) El número de indicaciones diferenciadas dadas por el indicador seleccionado será considerado como el número de sus estados discretos. Es evidente que fueran los que fueren los estados unívocamente determinados del indicador, éste se reduce a la clase de indicadores discretos, y el modelo estructural del sistema concreto puesto de manifiesto con la ayuda del indicador discreto será llamado también discreto y tendrá una serie de rasgos específicos comunes para todos los modelos de tal tipo.

De acuerdo con lo anterior, puede decirse que la Lógica matemática tiene relación solamente con los modelos estructurales discretos, a diferencia de aquellas disciplinas matemáticas, como el cálculo diferencial e integral que simulan estructuras continuas. En la Lógica matemática han sido elaboradas ampliamente las ramas de simulación de estructuras con relaciones discretas bivalentes, es decir, aquellos modelos estructurales que se distinguen con la ayuda de indicadores de dos estados.

Vista la Lógica matemática como una ciencia sobre la simulación discreta de sistemas, es posible señalar de manera concreta, algunas tareas donde aquélla interviene precisamente cuando se trata de considerar, por ejemplo, sistemas automáticos de acción discreta para la elaboración de la información que constituyen la base de las máquinas computadoras, los mecanismos automáticos utilizados en el control de objetos según un algoritmo dado y los agregados que simulan la acción del organismo vivo. Entre esas tareas estarían en primer lugar, las de describir la estructura de un sistema dado, lo cual supone la construcción (diseño) del modelo estructural correspondiente y la selección del indicador apropiado para tal descripción. Aquí es preciso mencionar dos de las tareas principales que ponen de manifiesto los vínculos lógico-cibernéticos: el *análisis* y la *síntesis* de los mecanismos automáticos. En el primero partimos del modelo estructural (estructura lógica) para explicar la estructura del mecanismo, el operador que realiza el esquema del mismo, etc. La *síntesis* de otra parte, consiste en la creación de variantes óptimas del modelo estructural de un posible sistema según las propiedades que el mismo deba reunir. Otras tareas más complejas pueden resultar de la combinación de las anteriores.

Lo dicho anteriormente, como ya hemos advertido, no pretende ser definitivo, en todo caso es una de las formas posibles de abordar la cuestión. No obstante, ello plantea necesariamente una interrogante relacionada con los *sistemas formalizados* y sus lenguajes, que ocupan indudablemente un lugar central en la Lógica matemática, y con aquella forma de abordar esta última como una teoría general de tales sistemas. A nuestro entender hay algo común a ambas concepciones que se desprenden de las consideraciones siguientes: Los *sistemas formalizados*, que pueden ser examinados como teorías abstractas de objetos no especificados, muchas veces se construyen como *modelos* de teorías informales o de nivel intuitivo, mientras que en otras oportunidades se parte de la construcción de un sistema formalizado y se busca un modelo o *interpretación* del mismo en términos, por ejemplo, de alguna teoría informal, pasando a ser, lo que anteriormente se tomaba como modelo, el objeto simulado, mientras que aquello que había sido el objeto de la simulación se convierte en modelo en esta otra relación. En los casos en que lo fundamental no sea el aspecto informal sino el aspecto estrictamente formal de los conceptos de modelo e interpretación como ocurre en la *Semántica lógica*, los mismos se explican de la forma siguiente: Sea F una fórmula de algún sistema formal, digamos L , designemos mediante el signo F' el resultado de sustituir todas las constantes no lógicas que ocurran en F por variables de los tipos correspondientes. La clase de objetos H que satisfagan* a la fórmula F' (presente la observación del requisito de que el tipo de cada proposición corresponda al tipo de la variable, en cuyo lugar el mismo se sitúa) recibe el nombre de modelo de la fórmula F (o modelo de la proposición expresada por dicha fórmula).

Ese algo común que hemos querido destacar con lo anotado en el párrafo precedente, es precisamente el hecho de que en ambos casos se trata de una relación de simulación entre la Lógica y los sistemas de acción discreta en el primer caso, y la Lógica y algún tipo de teoría en el segundo. Con esto pueden estar relacionadas las distintas presentaciones que se hacen de la lógica: algebraicas y axiomáticas, y posiblemente una dirección de la lógica que parte del análisis y síntesis de distintos tipos de sistemas cibernéticos y otra que parte de la formalización y estudio de la estructura formal de diversas teorías científicas, poniendo en primer tér-

* Se dice que una clase de objetos *satisface* por definición, a una fórmula dada si se produce una sustitución de las variables que ocurren en dicha fórmula por los nombres de aquellos objetos, tal que al situar el nombre de uno y el mismo objeto en lugar de la ocurrencia de una y la misma variable, la fórmula en cuestión resulta ser verdadera.

mino a las teorías matemáticas. En todo caso, nosotros hemos querido destacar el primer aspecto por los vínculos que guarda con el presente trabajo, no sin dejar constancia del segundo y de que en ambos casos, independientemente del nivel a que se plantean, se trata de la Lógica matemática ubicada en una relación de simulación.

Lo dicho sobre el objeto de la Lógica matemática parece ser suficiente en los límites de un trabajo de este tipo; procede ahora hacer una presentación de aquellos aspectos de la Lógica matemática necesarios para la consideración de los vínculos entre ella y la Cibernética.

3 • Presentación algebraica del cálculo proposicional: *La Lógica algebraica. El cálculo de predicados.*

La exposición del aparato de la Lógica matemática estará restringido aquí a las necesidades que impongan las cuestiones que enfocaremos más adelante. Este aparato viene dado por una presentación algebraica del *cálculo proposicional* necesaria para el estudio de los llamados *autómatas finitos sin memoria* y una presentación similar del *cálculo de predicados*, el cual aporta un instrumento de una mayor capacidad expresiva en tanto que toma en cuenta la estructura sujeto-predicativa de las *proposiciones elementales*, no así el cálculo proposicional que considera a estas últimas como todos inseparables. La necesidad del cálculo de predicados se presenta aquí cuando se introduce el elemento *tiempo* en la consideración de los sistemas cibernéticos de acción discreta.

El cálculo proposicional estudia las relaciones existentes entre las proposiciones: de una parte *operaciones* que permiten formar proposiciones compuestas (fórmulas) a partir de otras proposiciones y las conectivas lógicas del lenguaje “y”, “o”, “si, ..., entonces”, “si y sólo si” y “no”. De otra parte *derivaciones* que permiten demostrar la verdad lógica de una proposición a partir de una clase de proposiciones que se toman como fundamentales y se consideran de validez universal (axiomas) y una clase finita de reglas de inferencia que permiten demostrar otras proposiciones válidas a partir de ellas.

En la presentación algebraica del cálculo proposicional las proposiciones se examinan como magnitudes que admiten uno de dos valores, “verdadero” y “falso”. La misma es llamada a veces “Lógica proposicional”, “álgebra proposicional”, “álgebra lógica”, “lógica algebraica”, etc., aquí utilizaremos indistintamente, las dos últimas denominaciones.

El cálculo de predicados en la forma que lo presentaremos aquí, constituye un desarrollo del álgebra lógica, que contiene a ésta como parte

propia y además incluye el estudio de las expresiones que reflejan la estructura sujeto-predicativa de las proposiciones.

Toda presentación de alguna de las partes de la Lógica matemática debe ser precedida por la formulación del lenguaje formalizado con que se opera en el cálculo en cuestión.

En términos de la Lógica matemática se dice que un lenguaje está formalizado si se han cumplido los requisitos siguientes: 1) Los *signos primitivos* que integran el *alfabeto* del lenguaje se listan en su totalidad; 2) Se indican las reglas que permiten formar *proposiciones* (fórmulas bien formadas) y *términos* del lenguaje a partir de los signos primitivos; 3) Se indican las reglas que permiten transformar unas proposiciones (*fbf*) en otras; 4) Se indican los criterios de selección de las proposiciones significantes en el lenguaje en cuestión.

El lenguaje que utilizaremos en la presentación algebraica del cálculo proposicional puede ser descrito de la manera siguiente:

- a) *Alfabeto* (lista de símbolos primitivos) 1) p, q, r (con sub-índices o sin ellos) — Variables proposicionales; 2) 1, 0 — constantes lógicas que se interpretan como “verdadero” — “falso”, “abierto” — “cerrado” “excitado” — “inhibido”. 3) $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, -$ — operadores lógicos que se interpretan como “y”, “o”, “implica”, “si y sólo si” y “no”. 4) $(,)$ — signos auxiliares.
- b) *Definición inductiva de “fórmulas”*: 1) Las variables proposicionales y las constantes lógicas son fórmulas; (2-6). Si A y B —son fórmulas, entonces $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, $(A) \leftrightarrow (B)$ y $(\bar{A})$ son fórmulas.⁷ 7) Algo es una *fórmula* solamente en virtud de 1-6 (Condición de cerradura).

La anterior definición inductiva de *fórmulas bien formadas* es al mismo tiempo un *criterio efectivo* que permite distinguir a aquellas de otras expresiones⁸ que no tienen el carácter de tales.

4 • El álgebra de la Lógica.

El álgebra de la Lógica constituye una de las partes fundamentales de la Lógica matemática basada en la aplicación de los métodos algebraicos en la Lógica. Las fórmulas definidas con anterioridad pueden ser consi-

⁷ A y B constituyen variables sintácticas o metalingüísticas.

⁸ Una *expresión* es una secuencia finita de símbolos primitivos.

70 deradas como fórmulas del álgebra de la Lógica. Cada fórmula del álgebra de la Lógica representa alguna *función del álgebra de la Lógica*.

El concepto de función del álgebra Lógica podemos definirlo, siguiendo a Yablonskii,⁹ de la manera siguiente:

Sea D el conjunto de funciones $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tales que sus variables sean definidas en el conjunto $E = \{1, 0\}$ y tales que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$ si $a_i \in E$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Las funciones de D se nombran *funciones del álgebra lógica*. Es decir, que para dar una función es necesario señalar qué valores de la misma corresponden a cada combinación de valores de los argumentos.

Es evidente que la función $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$ quedará totalmente definida si se da la matriz siguiente:

p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	$f(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$
1	1	$\dots$	1	1	1
1	1	$\dots$	1	0	1
1	1	$\dots$	0	1	1
1	1	$\dots$	0	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	0	0	0

Es fácil ver que el número de combinaciones de valores de una función de n variables será igual a 2^n . De otra parte tenemos que el número de todas las funciones de D que dependen de n argumentos $p_1, p_2, \dots, p_n$ es igual a 2^{2^n} .

Del conjunto de las funciones del álgebra de la lógica se toma un grupo de ellas para su consideración especial. Estas son las llamadas funciones *elementales* que poseen una interpretación lógica simple y que usualmente se utilizan en calidad de operaciones lógicas para la construcción de expresiones más complejas. Las mismas corresponden a los operadores lógicos indicados en el lenguaje formalizado dado con anterioridad.

⁹ Yablonskii S. V., *Funktsional'nye postroeniya v k -znachnoi logike*. (Construcciones funcionales en la lógica k -valente). En: *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova* LI, Moskva, 1958.

- 1) $f_1(p) = \bar{p}$ — negación de p ;
- 2) $f_2(p_1, p_2) = p_1 \wedge p_2$ — conjunción de p_1 y p_2 (producto lógico);
- 3) $f_3(p_1, p_2) = p_1 \vee p_2$ — disyunción de p_1 y p_2 (suma lógica);
- 4) $f_4(p_1, p_2) = p_1 \rightarrow p_2$ — implicación de p_1 y p_2 (p_1 implica p_2);
- 5) $f_5(p_1, p_2) = p_1 \leftrightarrow p_2$ — equivalencia de p_1 y p_2 , pueden ser definidas mediante las matrices (tablas veritativas) siguientes:

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \rightarrow p_2$	$p_1 \leftrightarrow p_2$	$\bar{p}_1$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	
0	0	0	0	1	1	

Las funciones elementales poseen algunas propiedades que podemos describir de la manera siguiente: Sea que $x_1 \circ x_2$ designe a algunas de las funciones $p_1 \wedge p_2$, $p_1 \vee p_2$ y $p_1 \leftrightarrow p_2$, entonces:

- 1) $\circ$ posee la propiedad de la asociatividad, es decir,

$$(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$$

- 2) $\circ$ posee la propiedad de la conmutatividad, es decir,

$$x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

- 3) Para $\wedge$ y $\vee$ tienen lugar las leyes distributivas

$$(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_3 \vee x_2 \wedge x_3$$

$$(x_1 \wedge x_2) \vee x_3 = x_1 \vee x_3 \wedge x_2 \vee x_3$$

- 4) Relación entre la conjunción, disyunción y negación

$$\overline{\bar{x}} = x, \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2, \quad \overline{x_1 \wedge x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

- 5) Algunas propiedades de la conjunción y la disyunción:

$$0 \wedge x = 0, \quad 1 \wedge x = x, \quad 0 \vee x = x, \quad 1 \vee x = 1$$

Toda función del álgebra lógica posee lo que se ha dado en llamar *forma normal disyuntiva perfecta*. La *forma normal disyuntiva perfecta* de una función dada por medio de una tabla puede ser hallada por el método siguiente: Se toman aquellas combinaciones de valores ($v_1, \dots, v_m$) para los

- 72** cuales la función $f(p_1, \dots, p_m)$ es igual a 1. Luego, para cada una de estas combinaciones se construye una conjunción $(p_1^{v_1} \wedge p_2^{v_2} \wedge \dots \wedge p_m^{v_m})$ ($p^0 = \bar{p}$, $p^1 = p$) y luego todas estas conjunciones se unen por medio del signo de la disyunción.

EJEMPLO: La forma normal disyuntiva perfecta de la función $f(p_1, p_2)$ dada por la tabla

p_1	p_2	$f(p_1, p_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

es igual a

$$p_1 \wedge \bar{p}_2 \vee \bar{p}_1 \wedge p_2 \vee \bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2$$

Toda función del álgebra de la Lógica, salvo el caso en que $p = 1$, puede ser representada por medio de una expresión que consista en un producto de sumas lógicas, es decir una *forma normal conjuntiva perfecta*. Valiéndonos del método anterior podemos obtener la forma normal conjuntiva perfecta de una función $f(p_1, \dots, p_m)$ tomando aquellas combinaciones de valores $(v_1, \dots, v_m)$ para las cuales la función $f(p_1, \dots, p_m)$ es igual a 0. Luego, para cada una de estas combinaciones se construye una disyunción $p_1^{v_1} \vee p_2^{v_2} \vee \dots \vee p_m^{v_m}$, y por último todas estas disyunciones se unen mediante el signo de la conjunción.

Por ejemplo, la forma normal conjuntiva perfecta de $p_1 \leftrightarrow p_2$ será igual a $\bar{p}_1 \vee p_2 \wedge p_1 \vee \bar{p}_2$, dado que la misma toma valor 0 en las combinaciones (0,1) y (1,0).

Las formas normales perfectas por lo general admiten ser simplificadas en el sentido de ser transformadas en expresiones equivalentes con un número menor de variables que la original. Esto puede ser realizado mediante ciertos tipos de transformaciones como las que se relacionan a continuación:

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) = p$
- $(p \wedge q) \vee p = p$
- $(p \wedge q) \vee (p \vee p) = p \wedge (q \vee p)$
- $p \wedge (p \vee q) = p$

$$e) p \vee (\bar{p} \wedge q) = p \vee q$$

$$f) \bar{p} \vee (p \wedge q) = \bar{p} \vee q$$

$$g) p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q$$

$$h) \bar{p} \wedge (p \vee q) = \bar{p} \wedge q$$

Las formas simplificadas se denominan formas normales disyuntivas y conjuntivas según procedan de las perfectas de cada tipo respectivamente.

La *forma normal disyuntiva* (conjuntiva) consiste en una disyunción (conjunción) de *conjunciones* (disyunciones) *elementales*. Estas últimas se caracterizan por (a) no poseer dos variables iguales, (b) no contienen al mismo tiempo una variable y su negación, de lo que se desprende que (c) la conjunción (disyunción) elemental puede incluir bien a una variable o bien a la negación de ésta. Se dice que la forma normal es mínima si la misma contiene el menor número posible de variables en comparación con todas las formas normales que le sean equivalentes. Existen varios métodos de *minimización* de las formas normales que se han desarrollado paralelamente con las tareas de la síntesis de los autómatas finitos.

5 • Predicados.

Hemos señalado con anterioridad la necesidad de contar con un aparato lógico de mayor capacidad expresiva que permita considerar aquellos sistemas en que el elemento tiempo se introduzca en la descripción de los mismos. Tal aparato viene dado por el *cálculo de predicados*.

La peculiaridad de la lógica de los predicados radica en el hecho de que junto a las variables proposicionales que admiten dos valores posibles, "verdadero" (1) y "falso" (0), se toman en consideración las llamadas *variables de individuos* que se definen en algún conjunto arbitrario, finito o infinito de valores, denominado dominio o campo objetal.

Si tomamos como campo objetal, por ejemplo, al conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$ interpretados como valores discretos del tiempo (t) podemos formar funciones proposicionales de variables de individuos (de objetos) que usualmente reciben el nombre de *predicados*. El predicado $N(t)$ por ejemplo, constituiría una función proposicional cuyos argumentos tomarían valores en $\{1, 2, 3, \dots\}$ y se definiría en el conjunto $\{1, 0\}$.

Las operaciones de la Lógica proposicional que hemos analizado en el epígrafe anterior son aplicables a los predicados. A partir de los pre-

74 dicados, supongamos $P(l)$ y $P(m)$ pueden formarse nuevos predicados con la ayuda de los operadores $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $-$ etc. Por ejemplo $P(l) \wedge P(m)$, $P(l) \vee P(m)$, $P(l) \rightarrow P(m)$, $\overline{P(m)}$.

Además de estas operaciones, en la lógica de los predicados tienen lugar los llamados *cuantificadores universal* ($\forall$) y *existencial* ($\exists$), que son los que hacen de la Lógica de los predicados un aparato formal mucho más rico que la Lógica proposicional. Sea $P(l)$ un predicado cualquiera. Si anteponemos el cuantificador universal a dicho predicado obtendremos una expresión que puede interpretarse como: "para toda l tiene lugar $P(l)$ ". (P puede ser alguna propiedad). Análogamente, anteponiendo el cuantificador existencial al predicado $P(l)$ obtenemos una expresión que puede interpretarse como: "Existe una l (hay al menos una l) tal que P ". Si el conjunto de valores que pueda tomar l es finito, digamos a_1, a_2, a_3, a_4 , entonces la expresión $\forall l.P(l)$ puede ser escrita en forma de conjunción:

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge P(a_4)$$

La expresión $\exists l.P(l)$ puede ser escrita en forma de una disyunción:

$$P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee P(a_4)$$

Resumiendo lo dicho podemos afirmar que la presentación del cálculo de predicados, que aquí se ha limitado a solo aquellos aspectos indispensables para consideraciones posteriores, puede ser obtenida mediante una ampliación del alfabeto del lenguaje visto con anterioridad y de los puntos en la definición de fórmulas.

Los complementos al alfabeto serán:

- 1) $l, m, l^1, l^2, l^3, \dots$ variables de individuos;
- 2) $P, P^1, P^2, \dots$ predicados;
- 3) $\forall, \exists$ cuantificadores;
- 4) X, Y, Z, X^1, Y^1 fórmulas.

Los complementos a la definición de fórmula serán:

- 1) Si $l, l^1, \dots, l^n$ ($n \geq 2$) son variables de individuos y P es un predicado, entonces $P(l)$ y $P(l^1, \dots, l^n)$ son fórmulas predicativas;

- 2) Las fórmulas predicativas son fórmulas;
- 3) Si X es una fórmula, entonces $(\exists l)X$ y $(\forall l)X$ son fórmulas.

A esto añadimos la definición de ocurrencia en una fórmula: Una variable de individuos l ocurre en una fórmula X en los casos siguientes: 1) l ocurre en $P(l)$; 2) l^i ocurre en $P(l^1, \dots, l^n)$, donde $i = 1, \dots, n$; 3) Si l ocurre en Y y Y ocurre en X , entonces l ocurre en X . La ocurrencia de l en X se denomina *ligada* si l ocurre en Y y $(\exists l)Y$ o $(\forall l)Y$ ocurren en x y *libre* en los casos restantes.

6 • Bivalencia y Polivalencia.

Hasta ahora nos hemos desenvuelto dentro de lo que pudieramos llamar una concepción bivalente de la Lógica, es decir, hemos visto sistemas lógicos basados en el principio de la bivalencia de las proposiciones que dice que toda proposición puede ser evaluada como *verdadera* (1) o *falsa* (0). Se asume que ninguna proposición verdadera puede ser al mismo tiempo falsa y viceversa. Llamamos Lógica bivalente en sus diversos aspectos (proposicional, funcional, etc.) a aquella que se fundamenta en el principio aludido. La Lógica bivalente ha podido alcanzar un gran escaño en la Cibernética precisamente por el hecho de que la conducta de muchos sistemas cibernéticos está basada en un principio binario de "sí" o "no". McCulloch y Pitts, como veremos más adelante, sentaron este principio con relación a un caso particular de autómatas finitos: los neuromecanismos.

No obstante lo dicho, a partir de 1920, con los trabajos de Jan Łukasiewicz¹⁰ comenzaron a desarrollarse las llamadas lógicas polivalentes, que suponen el principio de la polivalencia de las proposiciones consistente en que las mismas no solamente pueden ser evaluadas con los valores veritativos tradicionales de la Lógica clásica (verdadero y falso), sino que pueden tomar otros valores cuyo número puede ser mayor que dos, finito e infinito (lógicas finitivalentes e infinitivalentes). Es fácil ver, de acuerdo con esto, que la Lógica bivalente pudiera considerarse como un caso particular de Lógica polivalente.

Las Lógicas polivalentes ocupan hoy un lugar importante en las investigaciones lógico-cibernéticas, hecho que puede ser constatado en los

¹⁰ Łukasiewicz J., Logika trójkwartościowa. "Ruch Filozoficzny", Lwów, 1920, No. 5.

$p \backslash q$	1	2	3	0	p	$\bar{p}$
1	1	2	3	0	1	0
2	2	2	0	0	2	3
3	3	0	3	0	3	2
0	0	0	0	0	0	1

Este método puede ser generalizado fácilmente para la obtención de lógicas 2^n -valentes, siendo $n = 2, 3, 4, \dots$ ¹⁵

La forma en que la lógica matemática ha sido expuesta hasta aquí no agota por supuesto todas sus partes, y de éstas todas las de posible aplicación a la Cibernética. Hemos restringido esa descripción a aquellos aspectos necesarios para la consideración de los autómatas finitos, como uno de los tipos de objetos cibernéticos donde se manifiestan con claridad las relaciones entre la Cibernética y la Lógica matemática.

7 • ¿Qué es un autómata?

En la técnica se utiliza el término "autómata" para designar aquellos sistemas, y mecanismos en los que los procesos de obtención, transmisión y utilización de la energía, materiales e información necesarios para el cumplimiento de sus funciones, se realizan sin la participación directa del hombre.

En la Cibernética el término "autómata" denota un concepto más abstracto. Los autómatas tal y como los vamos a considerar aquí, constituyen sistemas dinámicos de acción discreta, es decir, sistemas que pueden modificar su conducta en un tiempo (imaginario) discreto, es decir, este último varía en un conjunto numerable. Estos sistemas constan de un número finito de *entradas* que reciben la información y un número finito de *salidas* para la transmisión de la información elaborada.

En cada momento (tacto) discreto de tiempo, digamos $t_1, t_2, \dots, t_m$ a las entradas del sistema acude un número k de magnitudes de entrada $p_1, p_2, \dots, p_m$. Cada una de estas magnitudes puede tomar un número fijo de valores de algún alfabeto de entrada E que denota los estados de las entradas del sistema.

¹⁵ Ver: Bueno E.: "Lógicas modales polivalentes". Rev. Universidad de La Habana. Año XXXIII, No. 193, 1969.

En las salidas del sistema es posible observar n magnitudes de salidas $s_1, s_2, \dots, s_n$, cada una de las que puede tomar un número fijo de valores de un alfabeto de salida S que denota los estados de salida del sistema.

En cada momento de tiempo el sistema puede encontrarse en alguno de los estados $z_1, z_2, \dots, z_n$. El estado del sistema en cada momento se define en función de la magnitud de entrada p en ese momento y el estado z en el momento anterior.

El sistema transforma una situación en la entrada $p = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ en una situación de salida $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ en dependencia de su estado en el momento anterior.

Pueden ser distinguidos diversos tipos de autómatas, aquí tomaremos en cuenta solamente los *autómatas sin memoria* y los *autómatas con memoria finita*.

Autómatas "sin memoria".

Los autómatas llamados "sin memoria" son sistemas en que una situación o suceso (s) de la salida es determinada unívocamente por una situación o suceso (p) en la entrada, cosa esta que condiciona la invariabilidad del *estado interno* del autómata y la independencia de aquél con relación a alguna influencia externa. La actividad de las salidas en el momento t depende solamente de la actividad de sus entradas en uno de los momentos precedentes $t - \Delta$, y el intervalo Δ , llamado tiempo de reacción, es igual para todos los t , es decir el tiempo de reacción es el mismo para todas las señales de entrada en el curso del trabajo del autómata.

Autómatas con memoria finita.

Este tipo de autómata se caracteriza por el hecho de que los estados de las salidas (s) no dependen exclusivamente del valor de la entrada en un momento dado, sino también del estado (z) del sistema, determinado por el valor de (p) en el momento precedente. En estos autómatas las influencias externas precedentes se fijan en el autómata mediante cambios en su estado interno, dando por resultado que el estado al que pasa el sistema sea determinado por las señales de entrada y su estado interno en un momento dado. Estos autómatas son conocidos por "autómatas finitos", es decir, sistemas que tienen un número finito de entradas, un número finito de estados internos y cuyo trabajo posee un carácter determinista. Los estados internos de estos autómatas pueden ser utilizados

para la memorización y el cálculo. Esta limitación a la finitud de los estados, por lo visto, da una aproximación mejor al concepto de sistema físico (máquina física).

79

Veamos ahora algunos casos particulares de autómatas y qué papel juega la Lógica matemática en la descripción, síntesis y análisis de los mismos.

8 • Relés electromagnéticos.

Los relés electromagnéticos (o simplemente relés) constituyen uno de los tipos más comunes de autómatas finitos sin memoria. En estos sistemas, tanto las entradas como las salidas toman dos valores solamente. La bivalencia de estos sistemas puede ser expresada bien por medio de una *alta* o *baja corriente* de entrada o de salida, bien por la presencia o ausencia de impulso, bien porque el circuito de contacto esté cerrado o abierto. Es decir, los relés están fundamentados no solamente en un principio discreto, sino también en un principio bivalente, al cual se supone sometida la utilización de cambios extremos de alguna magnitud.

Hay una serie de propiedades comunes a los sistemas de relés que pueden ser consideradas independientemente de sus naturalezas particulares y que pueden representarse por medio del esquema siguiente:

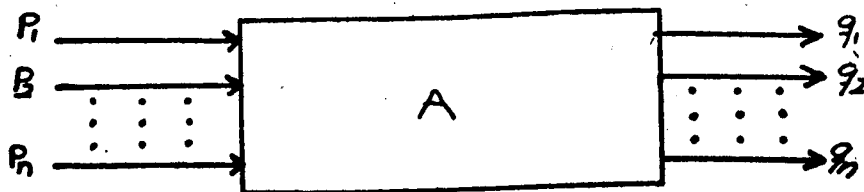


Fig. 1

En el esquema anterior las p_i ($1 \leq i \leq n$) corresponden a las entradas del sistema de relé, mientras que las q_i ($1 \leq i \leq n$) corresponden a las salidas del mismo y A denota el mecanismo del relé.

Los sistemas del relé pueden ser divididos en relé de estructura simple y de estructura compleja. De esta manera, la salida de un sistema puede convertirse en la entrada de otro como se muestra en el esquema que sigue:

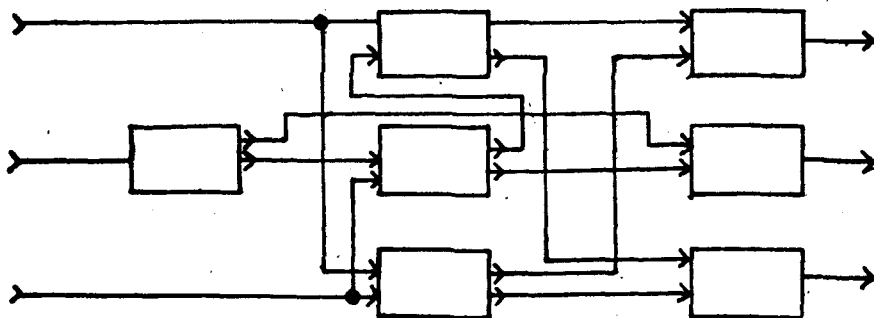


Fig. 2

Si se estudia con detenimiento el carácter de la conducta de las entradas y las salidas del sistema de relé se puede arribar a la conclusión de que el mismo constituye cierto tipo de transformador que recibe información de un tipo y transmite información de otro tipo. En general la información que pasa por las entradas del sistema contiene datos de los tipos siguientes: 1) relacionados a combinaciones de sucesos o situaciones que existen o no; 2) relacionados a secuencias de sucesos o situaciones que ocurren en un orden determinado; 3) relacionados con casos que resultan de las combinaciones de 1 y 2. Y ya que el sistema del relé debe responder a los estímulos de entrada con la transmisión de nueva información por las salidas, es decir, está vinculado funcionalmente con la información de entrada, tiene sentido considerar estos sistemas como mecanismos para la elaboración y transformación de la información.

Un relé electromagnético simple como se muestra esquemáticamente en la fig. 3, consta de una bobina (a), el núcleo de la bobina (b), el inducido (c) y dos grupos de contacto: normalmente cerrados (d) y normalmente abiertos (e). Cuando por el enrollado penetra la magnitud de corriente requerida, el inducido será atraído hacia el núcleo, lo cual conlleva a que los contactos normalmente abiertos se cierren y a que los normalmente cerrados se abran.

En caso contrario el inducido se libera y como resultado se cierran los contactos normalmente cerrados y se abren los normalmente abiertos.

Aquí nos interesa principalmente la conducta de la bobina y de los contactos del relé. Cada contacto puede encontrarse en uno de dos estados: *cerrado* y *abierto*. El estado de cada contacto puede ser considerado

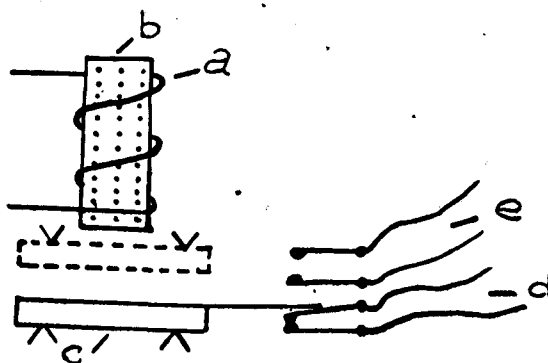


Fig. 3

como una variable p_1 que puede tomar uno de dos valores: 1 (cerrado) y 0 (abierto). Con respecto a la bobina tenemos que su primer estado estará determinado por la presencia de corriente en la misma, mientras que el segundo por la ausencia de aquella. El estado de la bobina puede ser representado también por una variable que puede tomar uno de dos valores: 1 (hay corriente) y 0 (no hay corriente), es decir

Elementos	1	0
Contacto	Cerrado	Abierto
Bobina	con corriente	sin corriente

Las variables lógicas que caracterizan los estados de un mismo relé (es decir, tanto los estados de la bobina, como los de los contactos) serán denotadas con un mismo símbolo, con subíndices iguales. $p = 1$ significará que hay corriente en la bobina, los contactos normalmente abiertos están cerrados y los normalmente cerrados están abiertos. $p = 0$ significa que no hay corriente en la bobina, los contactos normalmente abiertos están abiertos y que los normalmente cerrados están cerrados.

Las consideraciones anteriores permiten afirmar que el relé puede ser utilizado para la simulación de las funciones de la Lógica algebraica (síntesis) o para la simulación de los circuitos de relay mediante el aparato lógico (análisis).

Veamos primeramente cómo pueden ser realizadas las funciones lógicas elementales $\wedge$ (y), $\vee$ (o) y $-$ (no).

Sea que el sistema complejo de relé constituya un circuito en el que estén acoplados tres relés *en serie* con contactos normalmente abiertos

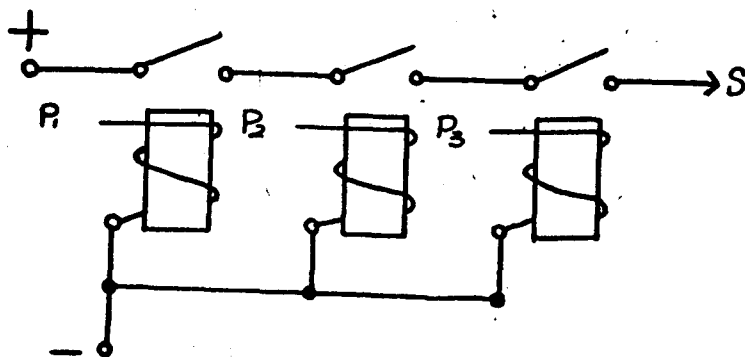


Fig. 4

En este circuito habrá corriente cuando sean conectadas las bobinas de los relés p_1 , p_2 , p_3 . En este caso el sistema realiza la función de la conjunción (y):

$$f(p_1, p_2, p_3) = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

Si tenemos tres relés acoplados en paralelo, los mismos realizarán la operación lógica de la alternativa o disyunción (o):

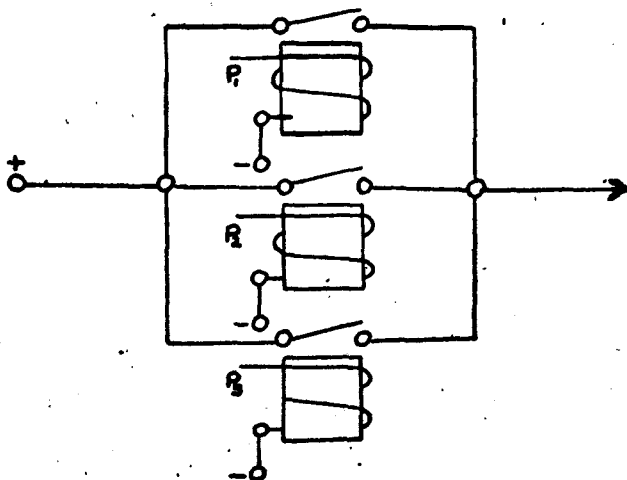


Fig. 5

El relé representado mediante los esquemas que siguen realiza las operaciones lógicas de la negación (—) y la afirmación: 83

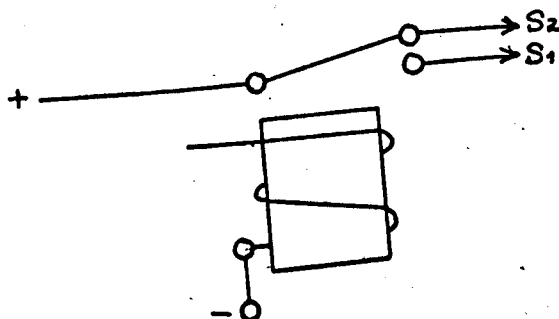


Fig. 6

Los métodos de la teoría de circuitos de relé permiten sintetizar circuitos que realicen una función lógica requerida. Veamos cómo construir un circuito de relé que realice la función $s = f(p_1, p_2, p_3)$ dada por la tabla siguiente

p_1	p_2	p_3	$f(p_1, p_2, p_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Como hemos indicado con anterioridad, esta función puede ser representada por su forma normal disyuntiva perfecta a partir de aquellas combinaciones en que $s = 1$. La *fndp* de la función dada toma el aspecto siguiente:

$$s = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \bar{p}_3) \vee (p_1 \wedge \bar{p}_2 \wedge \bar{p}_3) \vee (\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2 \wedge p_3)$$

La expresión anterior significa que s debe ser igual a 1 cuando $p_1 = 1$ y $p_2 = 1$ y $p_3 = 1$ o $p_1 = 1$ y $p_2 = 1$ y $p_3 = 0$, o ..., como se des-

- 84 prende de la tabla anterior. A partir de la *fndp* de la función dada puede construirse un modelo en el que cada paréntesis corresponda a un circuito de contactos acoplados en serie (los normalmente abiertos para símbolos sin negaciones y los normalmente cerrados para símbolos con negaciones); y toda corresponde al acoplamiento en paralelo de los cuatro circuitos en serie.

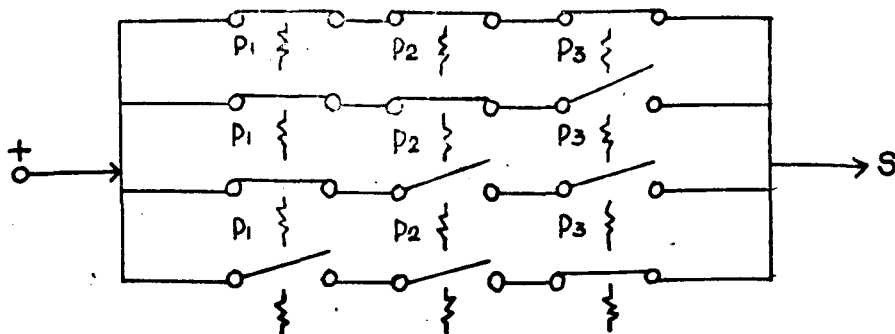


Fig. 7

Pueden haber muchos otros circuitos que realicen la función dada. Se sobreentiende que el circuito obtenido directamente a partir de la *fndp* puede no ser el más conveniente, bien por el número de elementos, bien por la confiabilidad de un trabajo continuado, etc. En este caso el circuito puede ser simplificado sin que varíe la función realizada por el mismo, como se muestra a continuación, donde el número de contactos queda reducido:

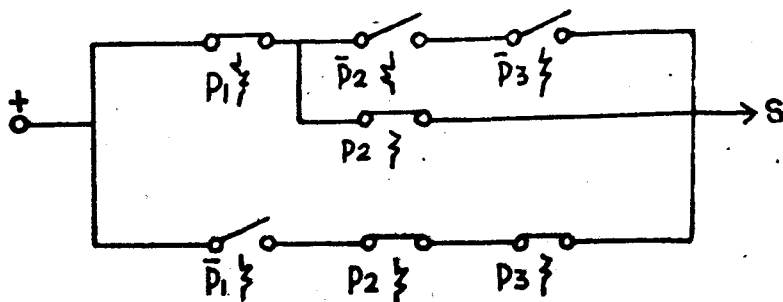


Fig. 8

La tarea opuesta: el análisis, puede ser descrito brevemente como sigue: a) La conductibilidad del contacto o de los grupos de contactos es igual a 0 si el circuito está abierto y a 1 si el circuito está cerrado;

b) cada contacto se representa con alguna variable de la lógica algebraica; c) el símbolo del contacto cerrado se escribe sin el signo de la negación, mientras que el símbolo del contacto abierto se escribe con el símbolo de la negación; d) cuando dos o más contactos aparecen unidos en serie su conductibilidad se expresa mediante la conjunción de los símbolos (variables) de los contactos; e) cuando dos o más contactos aparecen unidos en paralelo su conductibilidad se expresa mediante la alternativa (disyunción) de los símbolos de los primeros; por último f) si la estructura del sistema consta tanto de uniones en serie como en paralelo su conductibilidad puede ser hallada, considerando que la estructura está dividida en circuitos elementales en serie y en paralelo. La conductibilidad de estos circuitos elementales puede ser considerada como símbolos que se unen de acuerdo con d) y e).

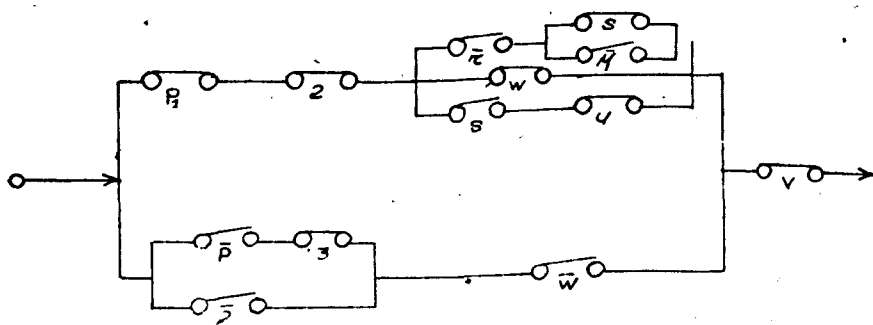


Fig. 9

Tomando el esquema anterior como un ejemplo de una tarea de análisis tenemos que la parte superior del mismo puede ser descrita por la expresión

$$(p \wedge q) \wedge (w \vee (\bar{s} \wedge u) \vee (\bar{r} \wedge (s \vee \bar{u})))$$

mientras que para la parte inferior tendremos.

$$\bar{q} \vee (\bar{p} \wedge s) \wedge \bar{w}$$

y la expresión completa que describe la conductibilidad del autómata dado toma el aspecto siguiente:

$$v \wedge (((p \wedge q) \wedge (w \vee (\bar{s} \wedge u) \vee (\bar{r} \wedge (s \vee \bar{u})))) \vee (\bar{q} \vee (\bar{p} \wedge s) \wedge \bar{w})).$$

Uno de los casos típicos de autómatas finitos con memoria, que revela con meridiana claridad las relaciones lógico-cibernéticas, y el sentido que las mismas poseen, viene dado por las llamadas redes nerviosas abstractas y sus componentes elementales: las neuronas formales, que aquí llamaremos en general *neuromecanismos*.

Los trabajos de McCulloch y Pitts¹⁶ y los *Automata Studies*¹⁷ que recogen los brillantes aportes a la teoría de las redes nerviosas abstractas realizados por Kleene, Von Neumann y Monsky, por citar los de mayor trascendencia, se han convertido en lugar común de toda referencia a los neuromecanismos. Aquí también nos remitiremos a esos trabajos.

¿Qué son los neuromecanismos?

Entre los presupuestos de MacCulloch y Pitts está el de considerar la célula nerviosa o neurona como un mecanismo formado por un cuerpo o *soma* del que parte un filamento nervioso (axón) que termina en uno o varios *pies terminales* (terminales presinápticas).

Las redes nerviosas abstractas resultan de la combinación de un número finito de neuronas o componentes elementales. Cada pie terminal de una neurona se encuentra en contacto con el cuerpo de no más de una neurona (de la neurona dada o de otra). Los pies terminales pueden ser de dos tipos: *excitadores* e *inhibidores*.

La región de contacto entre el pie terminal y el cuerpo de la neurona es denominado *sinapsis*.

Cada neurona cuenta con una *salida* y un número finito de *entradas*. Se consideran dos tipos de entradas: los *receptores* o aferentes periféricos (entradas de las neuronas receptoras) y los *sinapsis* o entradas de otras neuronas. Las salidas son de dos tipos también: Los *efectores* o salidas de las neuronas efectoras y los pies terminales o salidas de otras neuronas. De acuerdo con lo anterior pueden ser considerados tres

¹⁶ McCulloch W. S. and Pitts W., A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bull. Math. Biophys., 5, 115-133 (1943).

¹⁷ Shannon C. E. and McCarthy L. (Editors). "Automata Studies". Princeton University Press, 1956. Los "Automata Studies" constituyen una colección de trabajos sobre diversos aspectos de los autómatas, realizados por W. R. Ashby, J. McCarthy, J. T. Culbertson, M. L. Minsky, M. D. Davies, E. F. Moore, S. C. Kleene, C. E. Shannon, K. de Leeuw, N. Shapiro, D. M. Mac Kay, A. M. Urtley y J. von Neumann.

tipos de neuronas: a) *neuronas de entrada o receptoras* que reciben los impulsos del medio circundante y transmiten impulsos a otras neuronas. Estos impulsos en las neuronas de entrada son provocados por cambios determinados (estímulos) en el medio circundante, que aquí se considera como todo aquello que no sea la propia neurona; b) *neuronas centrales* (internas en la terminología de Kleene) que reciben impulsos de unas neuronas y transmiten impulsos a otras; c) *neuronas efectoras* que reciben impulsos de otras neuronas y envían impulsos al medio exterior. Estos impulsos provocan cambios en dicho medio. Al acoplarse varias neuronas para formar una red, aquéllas pueden quedar dispuestas en varias filas o rangos como se indica en la Fig. 10, de esta manera hablaremos de redes de 1er., 2do., ..., m rangos según el caso. En la Fig. 10 esto se indica por (1), (2), (3).

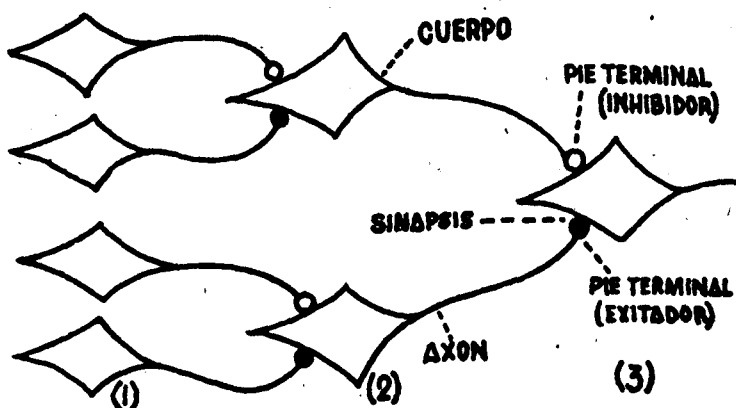


Fig. 10

En un momento dado t , una red nerviosa dada puede encontrarse en uno de dos estados: *excitada* y *no excitada*. Cuando se consideran los estados en que pueden encontrarse los neuromecanismos usualmente se admite una cuantificación del tiempo consistente en que aquéllos pueden ser excitados solamente en valores enteros de tiempo, es decir, se considera que las neuronas pueden encontrarse excitadas en un momento (tacto) igual a 1, 2, 3, 4, ... Como señala Culbertson, esto equivale a una representación idealizada del sistema nervioso como una máquina sincrónica de acción discreta, semejante a una computadora numérica que pasa de un estado a otro.

Hemos distinguido tres tipos de neuronas. En un momento t , la excitabilidad o no de una neurona de entrada se determina por condiciones

externas en relación con la red. Con respecto a las neuronas restantes hay que decir que su estado de excitabilidad o no en un momento dado, t , estará determinado por el hecho de que en el momento $t-1$, la diferencia entre el número de pies excitadores E y el de los pies inhibidores I sea igual o mayor a un número Θ llamado *umbral*, que representa el número mínimo de impulsos en que se produce la excitación ($E - I \geq \Theta$).

Los componentes elementales, como señala Von Neumann, pueden ser descritos con la ayuda de las llamadas *funciones umbrales*, y de aquí que muchas veces entre tales componentes se incluyan como un caso particular los *elementos de umbral*.¹⁸ Un elemento de umbral representa un mecanismo que posee varias entradas y una salida binaria. Cada entrada se compara con un número real llamado *peso*. La señal de salida del mecanismo es igual a una constante designada por 0 (constante lógica) hasta tanto la suma de los *pesos* de las señales de entrada no se haga igual o sobrepase un número real llamado *umbral*. En este caso la señal de salida alcanza otra constante designada por 1. La función del Álgebra lógica que puede ser simulada por un elemento de umbral se denomina *función umbral*.

Las premisas fundamentales para la simulación de las neuronas y redes nerviosas han sido sentadas por McCulloch y su escuela. Basándose en el hecho de que la conducta de las redes nerviosas está sujeta al principio de "todo" o "nada", McCulloch y Pitts demostraron que los fenómenos informacionales que tienen lugar en las redes nerviosas pueden ser estudiados utilizando el instrumental de la Lógica matemática bivalente y especialmente, que la conducta de las redes nerviosas puede ser descrita por medio de la lógica (análisis) y que para toda expresión lógica que prescriba un conducta determinada, puede ser encontrada una red que simule dicha expresión (síntesis).

Las relaciones entre las salidas y las entradas de una red nerviosa tal y como han sido descritas con anterioridad, pueden ser expresadas por medio de funciones lógicas, de aquí que si un neuromecanismo dispone de n entradas se notará fácilmente que la salida s en el tiempo t , $[s(t)]$, estará en función de las entradas $e_1(t_{n-1}), \dots, e_n(t_{n-1})$ es decir $s(t) = f[e_1(t_{n-1}), \dots, e_n(t_{n-1})]$.

De otra parte, tal como el neuromecanismo cuenta con n entradas y éstas pueden encontrarse en uno de dos estados *excitado* y no *excitado*,

¹⁸ Ver: Dertouzos M. L., Threshold Logic. A synthesis Approach. The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1965.

entonces la salida dependerá de 2^n combinaciones de estados de las entradas y el mismo podrá realizar a 2^n funciones lógicas.

89

McCulloch y Pitts introducen el concepto de *expresión proposicional de tiempo* EPT que designa a una *función proposicional de tiempo*. Esto no es más que aquel caso particular de predicados, al que hicimos referencia en el epígrafe 5, es decir expresión del tipo $P(t)$, $P(t) \wedge Q(t)$, $P(t) \vee Q(t)$, $\overline{P(t)}$, etc.

Un elemento de McCulloch y Pitts (componente elemental receptor) con dos filamentos de entrada y un umbral igual a 2, es decir un elemento excitado en el tacto t solamente en el caso de que ambas entradas resultan excitadas en el tacto $t-1$, puede ser representado por el siguiente esquema.

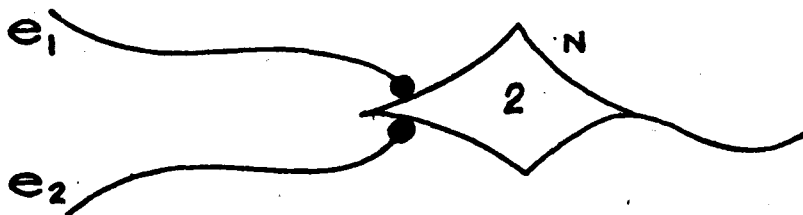


Fig. 11

Este elemento puede ser descrito por medio de la expresión lógica

$$N(t) = e_1(t-1) \wedge e_2(t-1)$$

Un elemento de ese mismo tipo que posea también dos entradas y un umbral igual a 1, es decir está excitado en el tacto t si y solamente si por lo menos una de las entradas resulta excitada en el momento $t-1$ puede ser representado mediante el esquema.

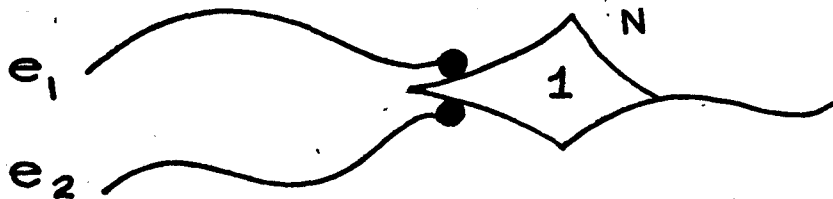


Fig. 12

y descrito por la expresión

$$N(t) = e_1(t-1) \vee e_2(t-1)$$

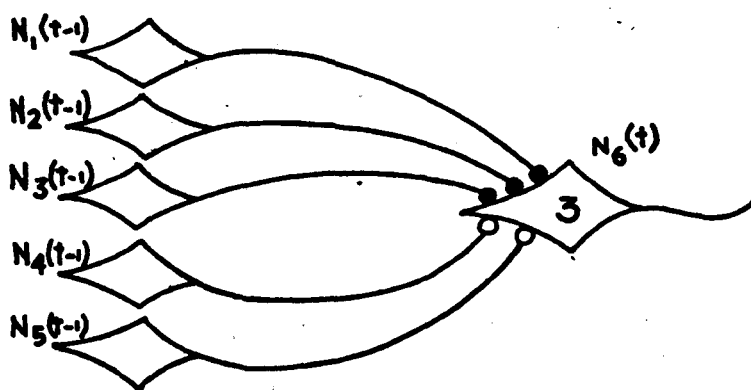


Fig. 13

Una red nerviosa tal como se representa en el esquema anterior, con tres neuronas de entrada, con pies terminales excitadores, dos neuronas de entrada con pies terminales inhibitorios, una neurona interna y un umbral igual a 3 puede ser descrita por la expresión

$$N_6(t) = N_1(t-1) \wedge N_2(t-1) \wedge N_3(t-1) \wedge \overline{N_4(t-1)} \wedge \overline{N_5(t-1)}$$

Estos son ejemplos sencillos que muestran cómo pueden ser analizados los neuromecanismos por medio del aparato lógico.

La tarea inversa, es decir la construcción de un neuromecanismo que satisfaga ciertos requisitos dados por una expresión lógica (síntesis) puede ser ilustrado en un ejemplo tomado del propio trabajo de McCulloch y Pitts. Este ejemplo consiste en lo siguiente: Si por un momento se junta a la piel un objeto de temperatura fría y luego se separa, surge una sensación de calor. Si esto se hace por un período más largo se producirá solamente una sensación de frío. Es sabido que algunos receptores cutáneos se excitan con el calor, mientras que otros se excitan con el frío. Si designamos por N_1 y N_2 la acción de los correspondientes receptores y por N_3 y N_4 la acción de aquellas neuronas cuya excitación implica la sensación de calor o de frío entonces podemos describir esos requisitos mediante las expresiones

$$N_3(t) = N_1(t-1) \vee N_2(t-3) \wedge \overline{N_2(t-2)},$$

$$N_4(t) = N_3(t-2) \wedge N_2(t-1)$$

Aquí McCulloch y Pitts suponen que la continuidad requerida para la sensación de frío es igual a dos retrasos sinápticos y uno para la sensación de calor.

91

Estas expresiones pueden ser realizadas mediante una red de dos salidas y dos componentes intermedios N_a y N_b , tal como se muestra en el siguiente esquema.

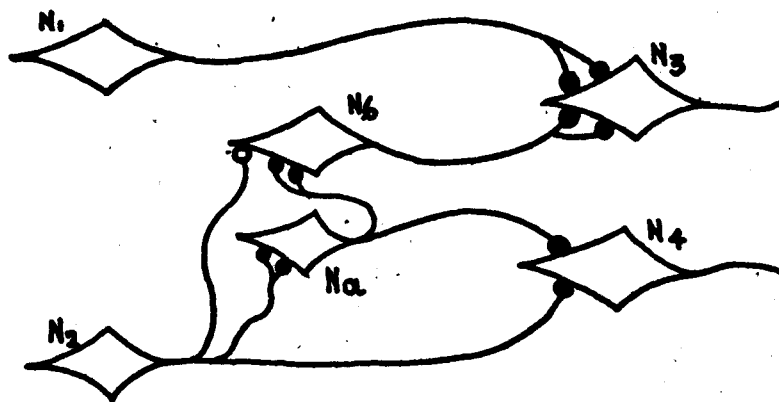


Fig. 14

Este primer modelo de McCulloch y Pitts no resultó ser totalmente adecuado para la descripción de la conducta de las redes nerviosas. Esto se debe fundamentalmente a que el umbral en él se supone invariable y por consiguiente las funciones cumplidas por la neurona. Es decir, se supone una confiabilidad ideal del trabajo de la neurona, lo cual no se ajusta a las neuronas reales, así como a otros mecanismos técnicos que pudieran ser descritos por el autómata que resultase de la generalización de los neuromecanismos. Esto por supuesto no priva a esta obra de su gran mérito reconocido por todos los especialistas que laboran en esta dirección.

Fue Von Neumann quien destacó la no adecuación del modelo inicial de McCulloch y Pitts en su artículo relacionado con la lógica probabilística y la construcción de mecanismos confiables a partir de componentes no confiables. Según él, la suposición de que los componentes elementales trabajan sin error no es del todo real y que tanto los mecanismos eléctricos como los mecánicos están sujetos a la posibilidad de negarse al trabajo lo que tiene lugar también con respecto a las neuronas. Para Von Neumann cada componente elemental está vinculado con un número positivo e que designa la posibilidad de error de dicho componente.

Este trabajo de Von Neumann marcó el inicio de la construcción de nuevos modelos de neuromecanismos que tomaran en cuenta las posibilidades de error como algo inherente al trabajo de aquellos como de cualquier otro autómata semejante. El propio McCulloch propuso en 1958¹⁹ un modelo de un grado mayor de aproximación a las neuronas reales en tanto que admite el error como una propiedad orgánica de la neurona.

Como señalamos con anterioridad un neuromecanismo puede realizar una de 2^n funciones. La *no confiabilidad* de un neuromecanismo determinado está dada por el hecho de que cuando fluctúan los *umbrales de funcionamiento* del mismo éste puede realizar una función distinta a la presupuesta. Estos neuromecanismos se denominan *no confiables*. Debe señalarse que la construcción de *neuromecanismos confiables* a partir de componentes no confiables se realiza por lo general a base de una sola fuente de confiabilidad llamada *redundancia lógica*.

Como señala L. A. Verbeek,²⁰ uno de los continuadores de Von Neumann, la forma más evidente de introducir la redundancia en la estructura de una red con errores es su paralelización. Sea η la probabilidad de error en la salida de una red nerviosa. La magnitud η depende de la probabilidad de error ϵ de los componentes de la red. Dicha magnitud excede la probabilidad de error de la última, es decir $\eta > \epsilon$. Puede considerarse una red redundante que realice la misma función pero con una probabilidad de error η' que se aproxime a ϵ . La función requerida se realiza con la ayuda de una red más sencilla, apropiada para el caso, cuya probabilidad general de error sea $\eta > \epsilon$.

Realizando esta función mediante m componentes y acoplando las m salidas con la entrada de algún "*órgano mayoritario*", podemos obtener una probabilidad final de error η' menor que η . Un *órgano mayoritario* no es más que un componente elemental con m entradas que se excita cuando hay señal en la mayor parte de las entradas. Supongamos que la función a realizar es

$$[e_1(t_i) \wedge e_2(t_i)] \vee [\bar{e}_1(t_i) \wedge \bar{e}_2(t_i)]$$

¹⁹ McCulloch W. S., "Agathe Tyche of nervous nets-the lucky reckoners", *Mechanization of Thought Processes*, N. P. L. Symp. No. 10. H. M. S. O., London 1959.

²⁰ Verbeek L. A. M., On error-minimizing neuronal sets. En: *Principles of self-organisation*, Transactions of the University of Illinois Symposium on Self-Organisation 8-9 June, 1961. Editors H. V. Foerster and G. W. Zopf, jr. Pergamon Press. Oxford-London-New York-Paris, 1962.

que es una de las 2^{2^n} funciones que debiera realizar un componente de 2 entradas, es decir, una de las 16 funciones posibles cuando $n=2$. Sin embargo la función aludida, como la función $A \wedge \bar{B} \vee \bar{A} \wedge B$ no se logra realizar sino mediante el acoplamiento de varios componentes elementales en este caso de dos entradas que realicen las funciones $A \vee \bar{B}$ y $\bar{A} \vee B$ y un órgano mayoritario que realice la función $A \wedge B$ tal como se presenta en la figura 15.

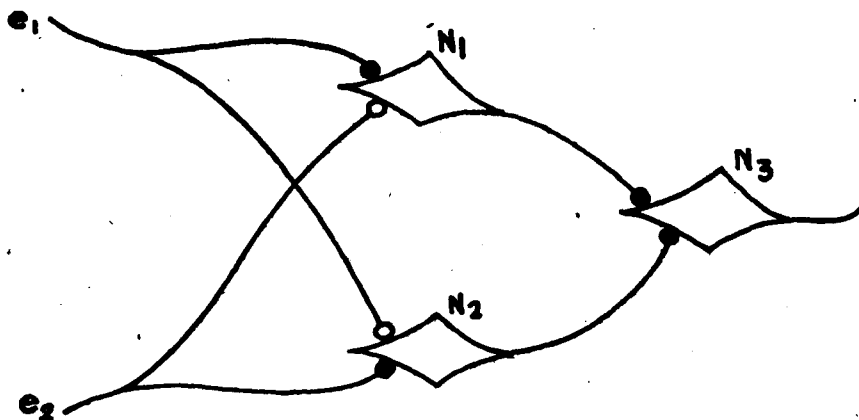


Fig. 15

$$N_3(t) = N_1(t-1) \wedge N_2(t-1) = [e_1(t-2) \vee \bar{e}_2(t-2)] \wedge [\bar{e}_1(t-2) \vee e_2(t-2)]$$

y aplicando las leyes distributivas aludidas en el epígrafe 4 obtenemos

$$\begin{aligned} e_1(t-2) \wedge [\bar{e}_1(t-2) \vee e_2(t-2)] \vee \bar{e}_2(t-2) \wedge [\bar{e}_1(t-2) \vee e_2(t-2)] = \\ [e_1(t-2) \wedge \bar{e}_1(t-2)] \vee [e_1(t-2) \wedge e_2(t-2)] \vee \\ \vee [\bar{e}_2(t-2) \wedge \bar{e}_1(t-2)] \vee [\bar{e}_2(t-2) \wedge e_2(t-2)] \end{aligned}$$

y eliminando los términos contradictorios ($p \wedge \bar{p} = 0$) obtenemos la función deseada $[e_1(t_i) \wedge e_2(t_i)] \vee [\bar{e}_1(t_i) \wedge \bar{e}_2(t_i)]$, es decir que el aludido método, desarrollado por Verbeek como una continuación de las ideas de Von Neumann, permite disminuir la probabilidad de error de la red y llevarla a un límite menor que la probabilidad ϵ de error de la neurona de salida.

Von Neumann ha propuesto algunos medios de aumentar la confiabilidad, uno de los cuales está constituido por la aplicación de las líneas

- 94 *múltiples* que consiste en que cada señal en la red es transmitida con la ayuda de un hacecillo de N líneas (entradas). Ahora en lugar de exigir la excitación de todas las líneas del hacecillo o de ninguna, se toma cierto nivel crítico fijo Δ ($0 < \Delta < \frac{1}{2}$). El estado del hacecillo es positivo (igual a 1, hay señal) si el número de líneas excitadas $\geq (1 - \Delta) N$, y negativo (igual a 0, no hay señal) si el número de líneas excitadas $\leq \Delta \cdot N$. Los niveles de excitación que se encuentran entre estos dos niveles se consideran intermedios o indeterminados.

Según Verbeek, este tipo de *redundancia* puede ser utilizada para la realización de funciones con variables lógicas dadas por hacecillos de filamentos, lo cual se logra utilizando el principio de "*todos con todos*" (all with all) en la estructura de la red nerviosa. Este principio significa que todos los filamentos de todos los hacecillos de entrada se unen con todos las neuronas que realizan la función de entrada en cuestión.

Este principio ha sido aplicado por Cowan²¹ utilizando la Lógica polivalente. Él demostró que los autómatas redundantes pueden ser descritos con la ayuda de distintos sistemas de Lógica polivalente. Estos sistemas pueden ser obtenidos por el método de *multiplicación de matrices* al que se ha hecho alusión en el epígrafe 6.

Supongamos que se necesita realizar la función lógica " $\wedge$ " de los hacecillos que constan de dos líneas cada uno (como se muestra en la Fig. 16) y sea que el nivel de excitabilidad se caracterice no por medio de un nivel crítico, como 1 y 0, sino con la ayuda de un conjunto de valores veritativos en los que los niveles (11, 10, 01, 00) corresponden a los valores 1, 2, 3, 4.

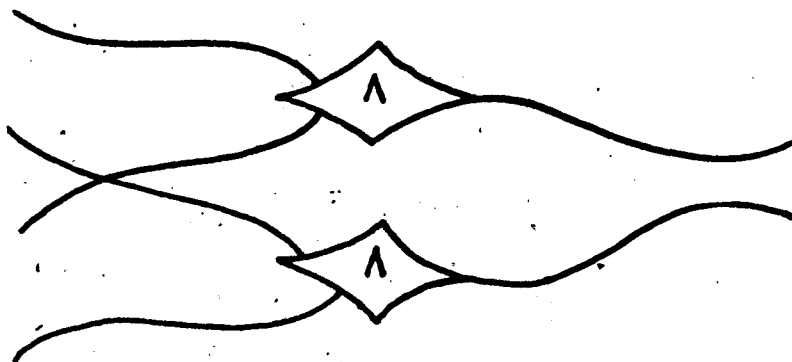


Fig. 16

²¹ Cowan J. D., Ob. cit.

Esta red realizará la multiplicación de dos matrices bivalentes como se ha mostrado en el epígrafe mencionado. En forma análoga pueden ser realizadas las otras funciones polivalentes.

Las posibilidades de estos modelos, su mayor o menor aproximación a las redes nerviosas reales, elementos de un sistema de tal complejidad como el nervioso, es tema de múltiples discusiones, y que cuenta con la dedicación de cientos de especialistas. El lector interesado en tales problemas puede remitirse a los trabajos a que hemos hecho referencia en distintos momentos de esta exposición.

Lo señalado aquí sobre los neuromecanismos son solamente ideas muy generales que han tratado de mostrar el objetivo propuesto: la utilización de distintos aspectos de la lógica en el estudio y operación con estos objetos cibernéticos.

* * *

Este es un punto de partida más que un camino ya andado. Como ya indicamos al comienzo de este artículo, no pretendíamos agotar toda la temática de las relaciones entre la lógica matemática y la cibernética, tal pretensión hubiera sido demasiado ambiciosa en los marcos en que aquí nos hemos desenvuelto, parte de divulgación, parte de presentación didáctica de muchas cuestiones. El especialista pudiera acusarnos de no haber trascendido el umbral de un ABC de la problemática lógico-cibernética; el no especialista —de haberlo sometido a una lectura dificultosa de cuestiones de suma complejidad no acostumbradas en nuestras publicaciones periódicas. Aún siendo así entendemos que este ABC-difícil era ya una necesidad comprendida mas no realizada.

Los dos tipos de sistemas cibernéticos examinados evidencian sin duda los vínculos entre la lógica y la cibernética, cuestión tal que se manifiesta en las tareas de análisis y síntesis de dichos sistemas. Esos vínculos como hemos visto, se presentan en un relación de simulación. Dicha simulación es posible principalmente porque se trata de sistemas que pueden ser considerados de acción discreta y basada su conducta en el principio de *todo o nada*, un principio binario o bivalente que se manifiesta en forma variada según el caso: *cerrado-abierto, excitado-inhibido, hay corriente-no hay corriente*, etc., y que se corresponde perfectamente con aquellos fragmentos de la lógica matemática que se basan en el principio de la bivalencia de las proposiciones. De otra parte, al estar los estados de salida de estos sistemas en función de los estados precedentes, bien

96 sean de la entrada o intermedios, y poseer los mismos un carácter binario, es posible simular tal comportamiento mediante las funciones de la lógica algebraica y su ampliación al cálculo de predicados. Es decir, una función lógica del tipo considerado depende de 2^n combinaciones de los valores de las variables mientras que los estados de salida de los sistemas en cuestión son iguales a 2^n combinaciones de los estados precedentes. Por último, como en la lógica, los sistemas considerados pueden realizar 2^2 funciones al igual que el número de funciones lógicas de n variables de la lógica algebraica.

La simulación lógico-cibernética, mediante las lógicas polivalentes en particular las 2^n valentes, planteadas en relación con la obtención de autómatas confiables a partir de elementos no confiables es posible a nuestro entender, en aquellos casos en que tales lógicas se obtienen utilizando el método de multiplicación de matrices que tenga a la lógica bivalente como sistema generatriz, y permita, por consiguiente representar algunos de los 2^n valores como una combinación de valores bivalentes como se vio en el lugar correspondiente. Este aspecto es un lugar de trabajo inmediato del que pueden obtenerse resultados de interés en relación con los neuromecanismos y otros tipos de autómatas.

La simulación lógico cibernética no se agota aquí. Insistimos en que éste es un punto de partida.



