Esbozo de una teoría generalizada de las propiedades relacionales

FRANCISCO MIRÓ QUESADA
Universidad Mayor de San Marcos, Lima

Man muss immer generalisieren. JACOBI

Introducción

El Cálculo de las relaciones es imprescindible para una fundamentación rigurosa de la inferencia matemática. Pero sólo la "Teoría de las Propiedades Relacionales" permite comprender el sentido último de los conceptos básicos de las ciencias exactas. Hoy nadie discute ya que el análisis definitivo de las nociones fundamentales de las matemáticas, como la igualdad, la equivalencia, la semejanza, el orden, la sucesión, la serie, ha sido posible gracias a la teoría de las propiedades relacionales. Empero, los desarrollos de esta teoría, han versado principalmente sobre las propiedades de las relaciones diádicas, y es obvio que no puede llegarse a una adecuada comprensión de ciertas relaciones matemáticas tan importantes como las operaciones, las series bidimensionales y multidimensionales, la mayoría de las relaciones proyectivas, las relaciones aplicables a los elementos de los espacios de varias dimensiones, etc., sin una teoría de las propiedades de las relaciones de grado n.

En lo que sigue se presenta un esbozo de lo que podría ser un lineamiento general de esta teoría. Se parte de las definiciones generalizadas de las propiedades relacionales "clásicas", se enuncian ciertos teoremas sobre la derivabilidad de unas propiedades de otras y sobre la posibilidad de aplicar un método especial que permita construir relaciones de cualquier grado que posean las más importantes de las propiedades definidas. El método que se ha seguido en la demostración de los teoremas no es estrictamente riguroso, porque no se hace uso de un cálculo relacional que determine las reglas para manejar la cuantificación de funciones proposicionales de grado indeterminado. El rigor logrado es por esto comparable al de las demostraciones matemáticas ordinarias. Creemos, sin embargo, que puede elaborarse para el caso reglas precisas de inferencia. Los trabajos de Quine son un anticipo que permite afirmar la existencia de esta posibilidad. En el presente trabajo sólo se enuncian las definiciones y los teoremas[1].

1. *Definiciones*

a) Reflexividad.

D 1.10 Una relación es reflexiva si

$(x)\ R(x\ x\ \ldots x)$

D 1.11 Una relación es no-reflexiva si

$(\exists\ x)\ R(x\ x\ \ldots x\ )$

D 1.12 Una relación es irreflexiva si

$\sim(\exists\ x)\ R(x\ x\ \ldots x)$

b) Reflexividad de campo

D 1.20 si $(\exists\ x_2\ \exists\ x_3\ \ldots\ \exists x_n)\ [R(\varphi^1_n)vR(\varphi^2_n)v\ldots vR(\varphi^{n!}_n),]$ en que el símbolo φ^i_n significa la i-ésima permutación de las n! permutaciones efectuadas entre las n-1 variables cuantificadas y x_1, se dice que x_1 pertenece al campo de R, y se escribe $cR(x_1)$.

D 1.21 Una relación es reflexiva en su campo si

$(x)\ [cR(x)\ .\supset.\ R(x\ x\ \ldots x)]$

D 1.22 Una relación es no-reflexiva en su campo si

$(\exists\ x)\ [cR(x)\ .\supset.\ R(x\ x\ \ldots x\ )]$

D 1.23 Una relación es irreflexiva en su campo si

$\sim(\exists\ x)\ [cR(x)\ .\supset.\ R(x\ x\ \ldots x\ )]$

[1] El análisis de las definiciones así como la demostración detallada de los teoremas se hallan en el trabajo inédito: FRANCISCO MIRÓ QUESADA. *Esbozo de una Teoría Generalizada de las Propiedades Relacionales*. Biblioteca del Seminario de la Escuela-Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Mayor de San Marcos, Lima.

c) Simetría

D 1.30 Se dice que una relación es simétrica si

$(x_1\ x_2\ \ldots x_n)\ [R(\varphi^1_n) \equiv R(\varphi^2_n) \equiv \ldots \equiv R(\varphi^{n!}_n)]$

D 1.31 Se dice que una relación es no-simétrica si

$(\exists\, x_1\ \exists\, x_2\ \ldots \exists\, x_n)\ [R(\varphi^1_n) \equiv R(\varphi^2_n) \equiv \ldots \equiv R(\varphi^{n!}_n)]$

D 1.32 Una relación es asimétrica si

$\sim(\exists\, x_1\ \exists\, x_2\ \ldots \exists\, x_n)\ [R(\varphi^1_n) \equiv R(\varphi^2_n) \equiv \ldots \equiv R(\varphi^{n!}_n)]$

El símbolo φ^i_n significa la i-ésima permutación de las n! permutaciones que pueden efectuarse con los n argumentos de R.

d) Transitividad

D 1.40 Una relación es transitiva si

$(x_1\ \ldots x_n\ \ldots x_{2n-1})\ [R(x_1\ \ldots x_n) \wedge R(x_2\ \ldots x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge R(x_n\ \ldots x_{2n-1})\ .\supset.\ R(x_1\ x_{n+1}\ \ldots x_{2n-1})]$

D 1.41 Una relación es no-transitiva si

$(\exists\, x_1\ \ldots \exists\, x_n\ \ldots \exists\, x_{2n-1})\ [R(x_1\ \ldots x_n) \wedge R(x_2\ \ldots x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge R(x_n\ \ldots x_{2n-1})..\ .\supset.\ .R(x_1\ x_{n+1}\ \ldots x_{2n-1})]$

D 1.42 Una relación es intransitiva si

$\sim(\exists\, x_1\ \ldots \exists\, x_n\ \ldots \exists\, x_{2n-1})\ [R(x_1\ \ldots x_n) \wedge R(x_2\ \ldots x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge R(x_n\ \ldots x_{2n-1})\ .\supset.\ R(x_1\ x_{n+1}\ \ldots x_{2n-1})]$

e) Conectividad

D 1.50 Una relación es conectiva si

$(x_1\ \ldots x_n)\ [cR(x_1) \wedge cR(x_2) \wedge \ldots \wedge cR(x_n) \wedge d(x_1\ \ldots x_n)\ .\supset\ .R(\varphi^1_n) v R(\varphi^2_n)\ v \ldots v R(\varphi^{n!}_n)]$

El símbolo d(.....) significa que todos los valores de las variables son diferentes.

D 1.51 Una relación es no-conectiva si

$(\exists\, x_1\ \ldots \exists\, x_n)\ [cR(x_1) \wedge cR(x_2) \wedge \ldots \wedge cR(x_n) \wedge d(x_1\ \ldots x_n)\ .\supset\ .R(\varphi^1_n) v R(\varphi^2_n) v \ldots v R(\varphi^{n!}_n)]$

D 1.52 Una relación es inconexa si

$\sim(\exists x_1 \ldots \exists x_n)\ [cR(x_1) \wedge cR(x_2) \wedge \ldots \wedge cR(x_n) \wedge d(x_1 \ldots x_n) \ .\supset.\ .R(\varphi^1_n) v R(\varphi^2_n) v \ldots v R(\varphi^{n!}_n)]$

f) Conectividad reflexiva

D 1.60 Una relación es reflexivamente conectiva si

$(x \ldots x_n)\ [cR(x_1) \wedge \ldots \wedge cR(x_n) \ .\supset.\ .R(\varphi^1_n)\ vR(\varphi^2_n)\ v \ldots v\ R(\varphi^{n!}_n)]$

D 1.61 Una relación es reflexivamente no-conectiva si

$(\exists x_1 \ldots \exists x_n)\ [cR(x_1) \wedge cR(x_2) \wedge \ldots \wedge cR(x_n) \ .\supset.\ .R(\varphi^1_n)\ vR(\varphi^2_n)\ v \ldots vR(\varphi^{n!}_n)]$

D 1.62 Una relación es reflexivamente inconexa si

$\sim(\exists x_1 \ldots \exists x_n)\ [cR(x_1) \wedge cR(x_2) \wedge \ldots \wedge cR(x_n) \ .\supset.\ .R(\varphi^1_n)\ vR(\varphi^2_n)\ v \ldots vR(\varphi^{n!}_n)]$

NOTA: Los símbolos empleados en las definiciones que anteceden son los de *Principia Mathematica* con la excepción del símbolo de campo "cR(x)" que ha sido tomado de *Elements of Symbolic Logic* de Reichenbach y del símbolo de conjunción "$\wedge$" que ha sido tomado de *Introduction to Logic* de Tarski.

2. *Teoremas*

T 2.1 Una relación reflexiva en su campo no puede ser asimétrica.
T 2.11 Una relación reflexiva no puede ser asimétrica.
T 2.2 Una relación simétrica y transitiva es reflexiva en su campo.
T 2.3 Una relación simétrica y reflexivamente conectiva es transitiva.
T 2.31 Una relación simétrica y reflexivamente conectiva es reflexiva en su campo.

3. *Construcción de relaciones de grado arbitrario que posean las propiedades consideradas*

Dada una relación R de grado n, se puede construir una relación S de grado n+1 en la siguiente forma[1]: se parte de $R(x_1 \ldots x_n)$ en

[1] Para que sea posible aplicar el procedimiento que se indica es menester que haya por lo menos n + 1 elementos que satisfagan a R que es de grado n.

que $x_1 \ldots x_n$ son valores que satisfacen a la relación. Se considera un nuevo elemento x_{n+1} diferente de los anteriores, y que con n-1 de ellos satisfaga en algún orden a R. Se unen estas dos expresiones por medio de alguna función veritacional *(truth-function)* y se obtiene una relación S entre los n+1 valores, construída sobre la base de la relación R de grado n. Como se trata de n+1 elementos, es necesario un simbolismo que indique el orden en que intervienen en la relación. Este simbolismo será $R(\varphi_n^\alpha)^{x_i}$ en que φ_n^α indica el orden de sucesión de las variables, y x_i la variable que se ha suprimido con el fin de incorporar a la relación el nuevo elemento. Así, en nuestro ejemplo anterior, la primera expresión será $R(\varphi_n^\alpha)^{x_{n+1}}$ en que α indica un orden arbitrario de partida, y x_{n+1} indica que el nuevo elemento no se considera entre los elementos que satisfacen a R. La segunda expresión será $R(\varphi_n^\beta)^{x_i}$ en que β indica también un orden arbitrario (que podría en ciertos casos ser igual al anterior) y x_i indica que en lugar de la variable x_i (uno de cuyos valores satisfacía a R junto con valores de las restantes variables) se ha puesto la variable x_{n+1} (uno de cuyos valores, diferentes de los valores que satisfacen a R en la primera expresión, satisface a R junto con los n—1 restantes de dicha expresión). Es decir que $i < n+1$. R se denomina la "base" de la relación S. La relación S, así definida, se denomina la "extensa". La definición de S, por medio de R, en la forma prescrita, constituye una definición "extensiva". La forma general, que incluye a todas las definiciones particulares, de la definición extensiva, será:

$$S = F_{I,J}\left[F_{i,j}, F_{g,h}, \ldots R(\varphi_n^\alpha)^{x_p}, R(\varphi_n^\beta)^{x_q}, \ldots\ldots x_1 \ldots\ldots x_n\, x_{n+1}\right]$$

$F_{I,J}$ simboliza una función veritacional cualquiera con cualquier número de argumentos. La J indica el número de argumentos, y la I la naturaleza de la función (conjuntiva, implicativa, etc.). $R(\varphi_n^\alpha)^{x_i}$ simboliza un orden definido de los n elementos a los que se aplica la relación R y $x_1 \ldots x_{n+1}$ los n+1 argumentos a los que se aplica la relación S. Los valores de p, q, ... varían desde 1 hasta n+1 con la condición de que por lo menos uno sea igual a n+1 y otro diferente de n+1.

El problema de interés que plantea la definición considerada, es el de saber cuando S conserva las propiedades de R. A este respecto pueden enunciarse los siguientes teoremas:

T 3.1 La definición extensiva construída sobre la base de funciones conjuntivas y disyuntivas conserva la reflexividad.

T 3.2 La definición $S = R(\varphi_n^\alpha)^{x_{n+1}} \wedge R(\varphi_n^\alpha)^{x_n} \wedge \ldots \wedge R(\varphi_n^\alpha)^{x_1} = \bigwedge_{i=n+1}^{i=1} R(\varphi_n^\alpha)^{x_i}$ conserva la simetría.

T 3.3 La definición $S = \bigwedge_{i=n+1}^{i=1} R(\varphi_n^\alpha)^{x_i}$ conserva la transitividad

T 3.4 Si la base es simétrica la conectividad se mantiene con cualquier tipo de definición extensiva

T 3.5 La definición $S = \bigwedge_{i=3}^{i=1} R(\varphi_n^\alpha)^{x_i}$ conserva la conectividad si R es transitiva

T 3.6 La definición $S = \bigwedge_{i=n+1}^{i=1} R(\varphi_n^\alpha)^{x_i}$ conserva la reflexividad, la simetría, la transitividad y la conectividad, si la base es reflexiva, simétrica, transitiva y conectiva.